

第4章 | 三角関数



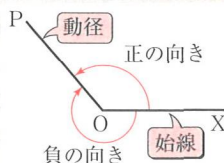
第1節 三角関数

1 角の拡張

まとめ

1 動径, 始線

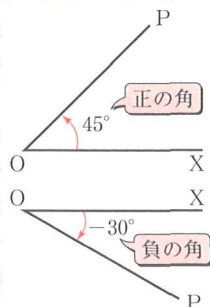
平面上で、点 O を中心に半直線 OP を回転させるとき、この半直線 OP を **動径** といい、動径の最初の位置を示す半直線 OX を **始線** という。



2 正の角, 負の角

回転の向きについて、時計の針の回転と逆の向きを **正の向き** といい、始線 OX から正の向きに測った回転の角を **正の角** という。

また、時計の針の回転と同じ向きを **負の向き** といい、始線 OX から負の向きに測った回転の角を **負の角** という。



3 一般角

$+45^\circ$, -30° , $+405^\circ$ のように、回転の向きと大きさをもつ量として拡張した角を **一般角** という。

4 θ の動径

θ を一般角とする。始線 OX から θ だけ回転した位置にある動径 OP を、 θ の動径 という。

5 動径の表す角

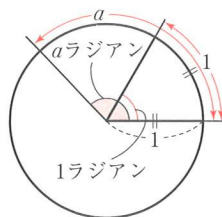
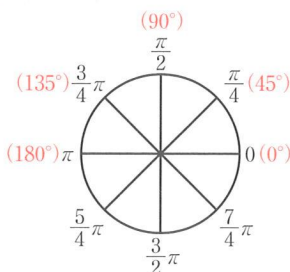
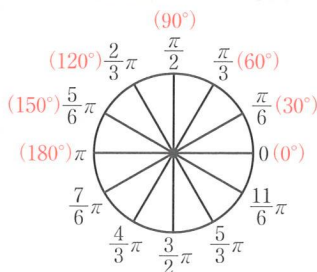
動径 OP と始線 OX のなす角の1つを α とすると、動径 OP の表す角は $\alpha + 360^\circ \times n$ である。ただし、 n は整数である。

6 度数法

30° , 180° などのように、これまで使ってきた度 ($^\circ$) を単位とする角の表し方を **度数法** という。

7 弧度法

円において、半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさを 1 ラジアン または 1 弧度 という。半径 1 の円では、長さ 1 の弧に対する中心角の大きさが 1 ラジアンであり、長さ a の弧に対する中心角の大きさは、 a ラジアンである。ラジアンを単位とする角の表し方を 弧度法 という。

8 ラジアンと度の換算 (0° から 180° まで)

注意 弧度法では、単位のラジアンを省略するのがふつうである。

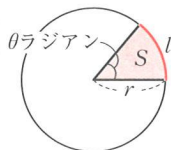
9 扇形の弧の長さや面積

半径 r 、中心角 θ (ラジアン) の扇形の

弧の長さ l 、面積 S は

$$l = r\theta$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2}lr$$



A 一般角

練習 1

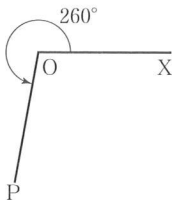
次の角の動径を図示せよ。

- (1) 260° (2) -45° (3) 420° (4) 750° (5) -240°

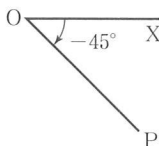
指針 一般角の動径 始線は点 O から水平方向に右へと延びる半直線を始線 OX とする。次に動径 OP をかく。一般角では、回転の向きも考える。

- 正の角……始線から正の向きに測る (時計の針の回転と逆の向き)
負の角……始線から負の向きに測る (時計の針の回転と同じ向き)

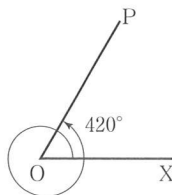
解答 (1)

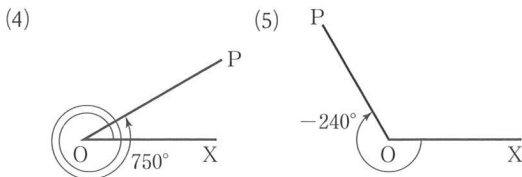


(2)



(3)





B 動径の表す角

練習
2

次の角のうち、その動径が 60° の動径と同じ位置にある角はどれか。

300° , 420° , 1040° , -60° , -300° , -780°

指針 動径の表す角 動径は1回転 360° でもとの位置にもどるから、角 α の動径と角 $\alpha + 360^\circ \times n$ の動径は同じ位置にある。6つの角の中から $60^\circ + 360^\circ \times n$ と表されるものを選ぶ。ただし、 n は整数である。

解答 $300^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times n$ を満たす整数 n はない。

$$420^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times 1$$

$1040^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times n$ を満たす整数 n はない。

$-60^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times n$ を満たす整数 n はない。

$$-300^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times (-1)$$

$-780^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times n$ を満たす整数 n はない。

よって、その動径が 60° の動径と同じ位置にある角は

$$420^\circ, -300^\circ \quad \text{答}$$

注意 $300^\circ = -60^\circ + 360^\circ \times 1$, $-780^\circ = -60^\circ + 360^\circ \times (-2)$

であるから、 -60° , 300° , -780° の動径は同じ位置にある。

C 弧度法

練習
3

次のことを確かめよ。

- (1) 180° は π ラジアン (2) 1 ラジアンは $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

指針 度数法と弧度法 弧度法は、弧の長さに着目した角の測り方である。

(1) 円において、半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさが1ラジアンである。半径1の円では、長さ1の弧に対する中心角の大きさが1ラジアンである。弧の長さと中心角の大きさが比例することを使う。

(2) (1)の結果を利用する。

解答 (1) 半径1の円において、中心角 180° に対する弧の長さは

$$2\pi \times \frac{180}{360} = \pi$$

したがって、 180° は π ラジアンである。 終

(2) (1) より、 π ラジアンは 180° であるから、1 ラジアンは $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ である。 終

練習
4

教 p.116

次の(1)~(3)の角を弧度法で表せ。また、(4)、(5)の角を度数法で表せ。

(1) 210° (2) 240° (3) 330° (4) $\frac{5}{4}\pi$ (5) $\frac{3}{2}\pi$

指針 度数法と弧度法 1° は $\frac{\pi}{180}$ ラジアンであるから、 x° は

$$x \times 1^\circ = x \times \frac{\pi}{180} \text{ (ラジアン)}$$

解答 (1) $210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$ 答

(2) $240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$ 答

(3) $330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$ 答

(4) $\frac{5}{4}\pi \times \frac{180}{\pi} = 225$ よって 225° 答

(5) $\frac{3}{2}\pi \times \frac{180}{\pi} = 270$ よって 270° 答

D 弧度法と扇形

教 p.117

練習
5

次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) 半径 4, 中心角 $\frac{\pi}{3}$ (2) 半径 6, 中心角 $\frac{7}{6}\pi$

指針 扇形の弧の長さ l と面積 S p.153 のまとめの公式を用いる。

解答は $S = \frac{1}{2}lr$, 別解は $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ を利用している。

解答 (1) $l = 4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$, $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 4 = \frac{8}{3}\pi$ 答

別解 $S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$ 答

(2) $l = 6 \cdot \frac{7}{6}\pi = 7\pi$, $S = \frac{1}{2} \cdot 7\pi \cdot 6 = 21\pi$ 答

別解 $S = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{7}{6}\pi = 21\pi$ 答

2 三角関数

まとめ

1 三角関数

座標平面上で、図のように x 軸の正の部分を開始線として、一般角 θ の動径と、原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を (x, y) とする。このとき、三角比と同様に、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

と定め、それぞれ一般角 θ の 正弦, 余弦, 正接 という。

これらはいずれも θ の関数であり、まとめて θ の 三角関数 という。

注意 点 P が y 軸上にくるような角 $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) に対しては、

$\tan \theta$ は定義されない。

2 単位円

原点を中心とする半径 1 の円を 単位円 という。

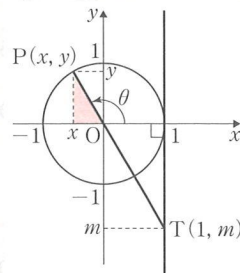
3 単位円上の点の座標と三角関数の値

一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(x, y)$ とすると

$$y = \sin \theta, \quad x = \cos \theta$$

直線 OP と直線 $x=1$ の交点を $T(1, m)$ とすると

$$m = \tan \theta$$

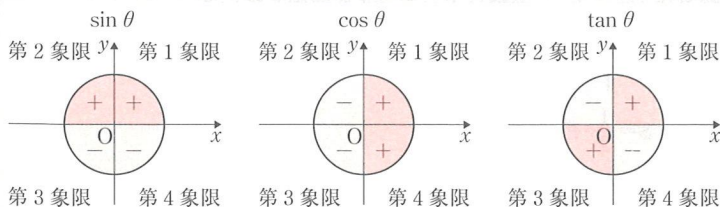


4 三角関数のとる値の範囲

$-1 \leq \sin \theta \leq 1$, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, $\tan \theta$ の値の範囲は実数全体

5 θ の動径のある象限と三角関数の値の符号

三角関数 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値の符号は、 θ の動径がどの象限にあるかで決まる。これを図で示すと、次のようになる。



6 三角関数の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

A 三角関数

練習
6

教 p.119

次の θ について, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を, それぞれ求めよ。

$$(1) \theta = \frac{5}{4}\pi \quad (2) \theta = \frac{11}{6}\pi \quad (3) \theta = -\frac{\pi}{3}$$

指針 正弦, 余弦, 正接の値

原点を中心とする半径 r の円, 角 θ の動径をそれぞれかき, 交点を P とする。 P の座標は特別な直角三角形の辺の比

($1 : \sqrt{3} : 2$, $1 : 1 : \sqrt{2}$) を利用して求める。
ここで $r=2$ か $r=\sqrt{2}$ に決めればよい。あとは三角関数の定義に従う。

解答 (1) 図で, 円の半径が $r=\sqrt{2}$ のとき, 点 P の座標は $(-1, -1)$ である。

そこで, $x=-1$, $y=-1$ として

$$\sin \frac{5}{4}\pi = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{答}$$

$$\cos \frac{5}{4}\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{答}$$

$$\tan \frac{5}{4}\pi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \text{答}$$

(2) 図で, 円の半径が $r=2$ のとき, 点 P の座標は $(\sqrt{3}, -1)$ である。

そこで, $x=\sqrt{3}$, $y=-1$ として

$$\sin \frac{11}{6}\pi = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{答}$$

$$\cos \frac{11}{6}\pi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{答}$$

$$\tan \frac{11}{6}\pi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{答}$$

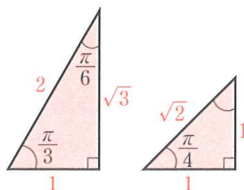
(3) 図で, 円の半径が $r=2$ のとき, 点 P の座標は $(1, -\sqrt{3})$ である。

そこで, $x=1$, $y=-\sqrt{3}$ として

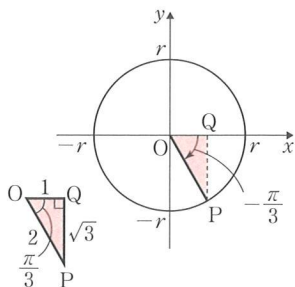
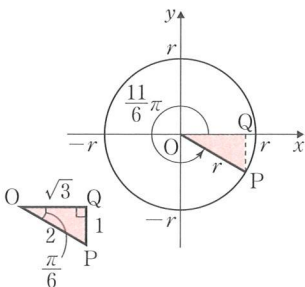
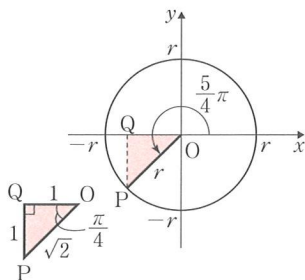
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{答}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \quad \text{答}$$

4
章

三角関数



練習
7

教 p.119

次の条件を満たすような θ の動径は、第何象限にあるか。

- (1) $\sin \theta < 0$ かつ $\cos \theta > 0$ (2) $\cos \theta < 0$ かつ $\tan \theta > 0$

指針 三角関数の値の符号 $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値の符号は、 θ の動径がある象限のそれぞれ y 座標, x 座標の符号と一致する。

解答 (1) $\sin \theta < 0$ となるのは 第3象限, 第4象限

$\cos \theta > 0$ となるのは 第1象限, 第4象限

よって 第4象限 **答**

(2) $\cos \theta < 0$ となるのは 第2象限, 第3象限

$\tan \theta > 0$ となるのは 第1象限, 第3象限

よって 第3象限 **答**

B 三角関数の相互関係

教 p.120

練習
8

θ の動径が第4象限にあり、 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

指針 三角関数の相互関係 数学 I で学習した三角比の相互関係と同じ手順で解くことができる。ただし、三角関数の場合、角 θ の大きさについては動径のある象限で示されることが多い。

解答 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

θ の動径が第4象限にあるとき、 $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{1}{3}\right) \div \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習
9

教 p.120

θ の動径が第3象限にあり、 $\tan \theta = 2$ のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ。

指針 三角関数の相互関係 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を使う。この相互関係は忘れがちだが、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割って得られる等式であるから、す

ぐに導けるようにしておく。

解答 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

θ の動径が第3象限にあるとき, $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{答}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{答}$$



深める

教 p.120

教科書の例題1を, $\sin \theta$ の値からではなく, $\tan \theta$ の値から求めて解いてみよう。

指針 三角関数の相互関係 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を用いて, $\tan \theta$ の値をまず求める。

解答 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から

$$\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}$$

θ の動径が第3象限にあるとき, $\tan \theta > 0$ であるから

$$\tan \theta = \frac{4}{3} \quad \text{答}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5} \quad \text{答}$$

練習
10

教 p.121

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

指針 式の値 相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使う。

(1) $\sin \theta \cos \theta$ は $(\sin \theta + \cos \theta)^2$ の展開式に現れる

(2) 因数分解 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ または $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ が利用できる。(1) も使う。

解答 (1) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{よって} \quad 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{すなわち} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sin^3\theta - \cos^3\theta &= (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) \\ &= (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9}\right) = \frac{13}{27} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad (2) \quad \sin^3\theta - \cos^3\theta &= (\sin\theta - \cos\theta)^3 + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27} \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習
11

教 p.121

等式 $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ を証明せよ。

指針 等式の証明 三角関数を含む等式の証明では、相互関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{を利用する。}$$

右辺を変形して左辺を導く。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \text{右辺} &= \tan^2\theta(1 - \cos^2\theta) &< \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ &= \tan^2\theta - \tan^2\theta\cos^2\theta \\ &= \tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta \\ &= \tan^2\theta - \sin^2\theta = \text{左辺} &< \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta \quad \text{終}$$

$$\text{別解} \quad \text{左辺} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\sin^2\theta$$

$$= \tan^2\theta\sin^2\theta = \text{右辺}$$

$$< 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\text{よって} \quad \tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta \quad \text{終}$$

3 三角関数のグラフ

まとめ

1 単位円と $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値

一般角 θ の動径と単位円の交点を P とすると

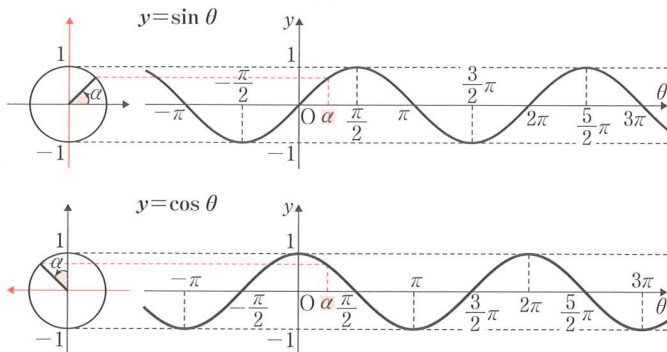
[1] $\sin \theta$ の値は、P の y 座標に等しい。

[2] $\cos \theta$ の値は、P の x 座標に等しい。

2 関数 $y=\sin \theta$, $y=\cos \theta$ のグラフ

$y=\sin \theta$ のグラフは、原点に関して対称である。

$y=\cos \theta$ のグラフは、 y 軸に関して対称である。



3 正弦曲線

$y=\sin \theta$ のグラフの形の曲線を 正弦曲線 または サインカーブ という。

$y=\cos \theta$ のグラフも正弦曲線である。

4 周期

動径は 1 回転するともとの位置にもどるから、次が成り立つ。

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin \theta, \quad \cos(\theta+2\pi)=\cos \theta$$

この性質により、関数 $\sin \theta$, $\cos \theta$ はいずれも 2π の 周期 をもつという。

注意 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して、常に $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき、

関数 $f(x)$ は p を周期とする 周期関数 であるという。このとき、 $2p$, $3p$

や $-p$ などとも周期であるが、ふつう正の周期のうち最小のものをさす。

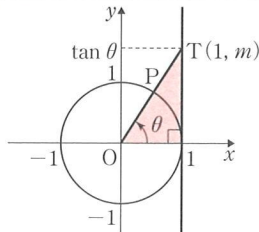
5 単位円と $\tan \theta$ の値

一般角 θ の動径と単位円の交点を P、直線 OP

と直線 $x=1$ の交点を $T(1, m)$ とすると

$\tan \theta = m$ である。よって、次のことがいえる。

[3] $\tan \theta$ の値は、T の y 座標に等しい。

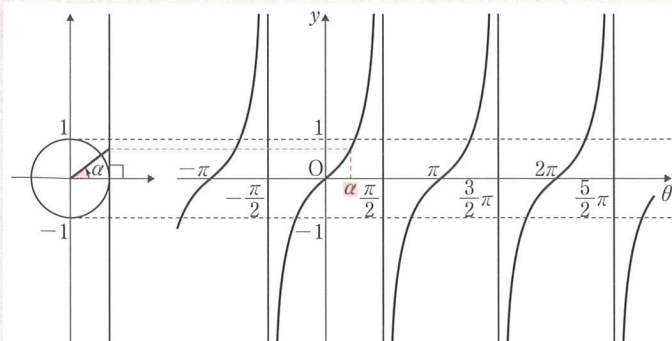


4 章

三角関数

6 関数 $y=\tan \theta$ のグラフ

関数 $y=\tan \theta$ のグラフをかくと、次のようになる。

7 漸近線 ぜんきんせん グラフが限りなく近づく直線を、そのグラフの 漸近線 という。

注意 $\tan \theta$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ では定義されないが、 $y=\tan \theta$ のグラフは θ が $\frac{\pi}{2}$ に近

づくにしたがって、直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づく。

8 関数 $y=\tan \theta$ の性質

- 1 $\tan(\theta+\pi)=\tan \theta$ が成り立つ。すなわち、 $\tan \theta$ は π の周期をもつ。
- 2 グラフは原点に関して対称である。

また、直線 $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) を漸近線にもつ。

9 三角関数の周期、値域、グラフの対称性

	$y=\sin \theta$	$y=\cos \theta$	$y=\tan \theta$
周期	2π	2π	π
値域	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$	実数全体
グラフの対称性	原点に関して対称	y 軸に関して対称	原点に関して対称

10 $y=a\sin \theta$ のグラフ

$y=\sin \theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向へ a 倍に拡大したものとなる。

11 $y=\sin(\theta-p)$ のグラフ

$y=\sin \theta$ のグラフを、 θ 軸方向に p だけ平行移動したものとなる。

12 $y=\sin k\theta$ のグラフ (k は正の定数)

$y=\sin \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{k}$ 倍に縮小したものとなる。

注意 余弦、正接のグラフについても同様に考えられる。

13 $\sin k\theta$ などの周期

k を正の定数とするとき

$\sin k\theta$, $\cos k\theta$ の周期はいずれも $\frac{2\pi}{k}$ である。

$\tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{k}$ である。

← $\sin(k\theta + 2\pi) = \sin k\theta$ から

$$\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{k}\right) = \sin k\theta$$

A 三角関数のグラフ

B いろいろな三角関数のグラフ

教 p.125

練習
12

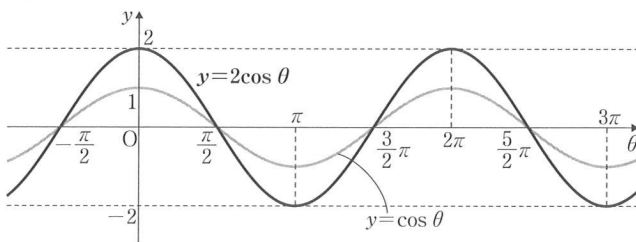
次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1) $y = 2\cos\theta$ (2) $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ (3) $y = \frac{1}{2}\tan\theta$

指針 $y = a\sin\theta$ などのグラフ もとになるグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向へ a 倍に拡大する。(2) は実際には上下に縮めたグラフになる。(3) は、 $\frac{1}{2}$ 倍ということであるから、 θ 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小する。

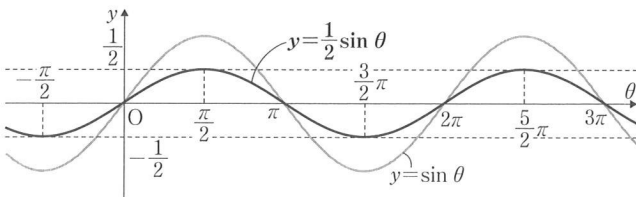
解答 (1) このグラフは、 $y = \cos\theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向に 2 倍に拡大したもので、図ようになる。

周期は 2π 答



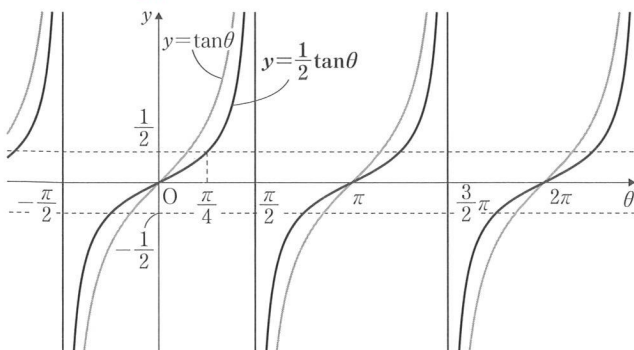
(2) このグラフは、 $y = \sin\theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので、図ようになる。

周期は 2π 答



- (3) このグラフは、 $y=\tan \theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので、図のようになる。

周期は π 答



練習
13

次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

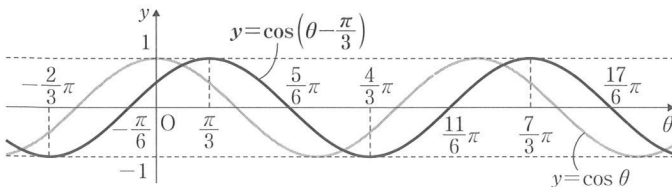
(1) $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $y=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

指針 $y=\sin(\theta-p)$ などのグラフ θ から引いている角の大きさだけ、もとなるグラフを θ 軸方向に平行移動する。

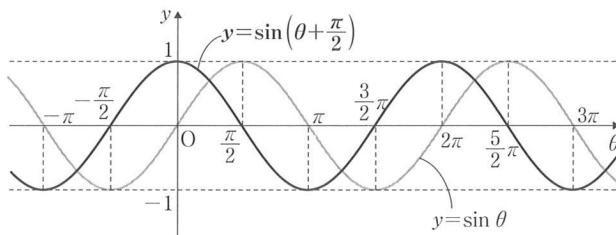
解答 (1) このグラフは、 $y=\cos \theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので、図のようになる。

周期は 2π 答



- (2) このグラフは、 $y=\sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもので、図のようになる。

周期は 2π 答

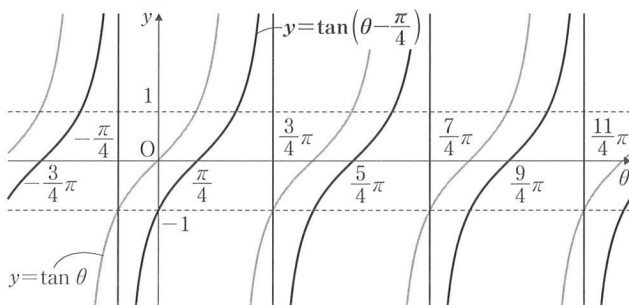


代表的な点を平行移動させよう。



- (3) このグラフは、 $y=\tan \theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したもので、図のようになる。

周期は π 答



まず漸近線をかくといいよ。



練習
14

教 p.126

次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

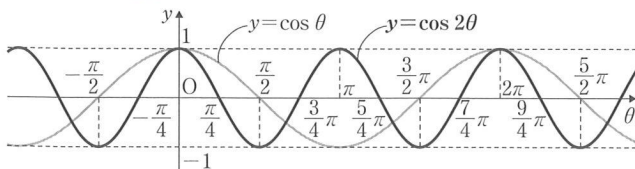
- (1) $y=\cos 2\theta$ (2) $y=\sin \frac{\theta}{2}$ (3) $y=\tan 2\theta$

指針 $y=\sin k\theta$ などのグラフ もとになるグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{k}$ 倍に縮小する。(2) は実際には左右に拡大される。

一般に、 $\sin k\theta$, $\cos k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{k}$, $\tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{k}$ である。

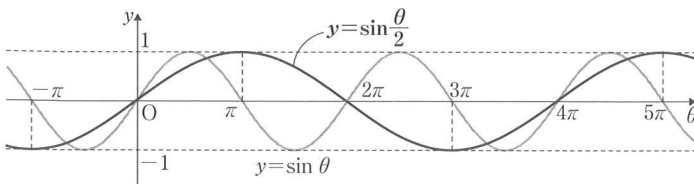
解答 (1) このグラフは、 $y=\cos \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので、図のようになる。

周期は π **答**



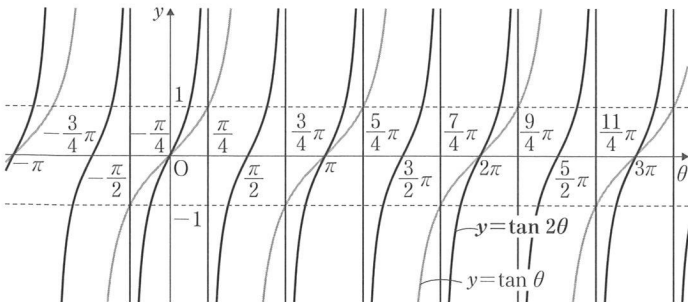
(2) このグラフは、 $y=\sin \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ 2 倍に拡大したもので、図のようになる。

周期は 4π **答**



(3) このグラフは、 $y=\tan \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので、図のようになる。

周期は $\frac{\pi}{2}$ **答**



練習
15

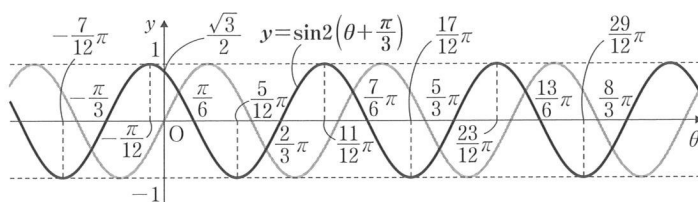
次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

$$(1) y = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \quad (2) y = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

指針 三角関数のグラフ (1) は $y = \sin 2\theta$, (2) は $y = \cos \frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に平行移動したものである。

解答 (1) $y = \sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので、図のようになる。

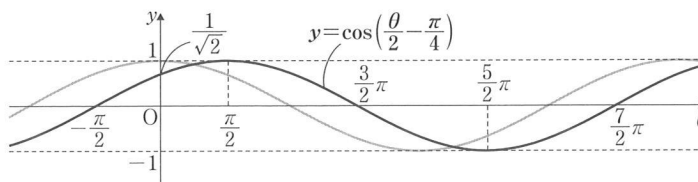
周期は $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 答



$$(2) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$y = \cos \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは、 $y = \cos \frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもので、図のようになる。

周期は $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$ 答



4 三角関数の性質

まとめ

1 三角関数の周期性

$$1 \quad \begin{cases} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \\ \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta \end{cases} \quad \text{ただし, } n \text{ は整数}$$

$\leftarrow \tan(\theta + 2n\pi) = \tan \theta \text{ も成り立つ。}$

注意 $\sin \theta, \cos \theta$ は 2π の周期をもち、 $\tan \theta$ は π の周期をもつ。

2 三角関数のグラフの対称性

$$2 \quad \begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{cases}$$

$\leftarrow y = \sin \theta$ のグラフは原点に関して対称
 $y = \cos \theta$ のグラフは y 軸に関して対称
 $y = \tan \theta$ のグラフは原点に関して対称

注意 関数 $y = f(x)$ について、次のことが成り立つ。

[1] 常に $f(-x) = -f(x)$ である

$\iff$ グラフは原点に関して対称

[2] 常に $f(-x) = f(x)$ である

$\iff$ グラフは y 軸に関して対称

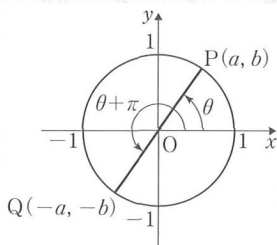
[1] の関数 $f(x)$ は 奇関数, [2] の関数 $f(x)$ は 偶関数 であるという。

3 $\theta + \pi, \theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数

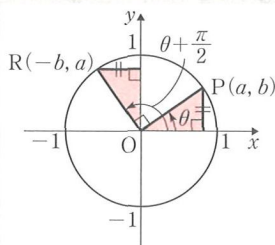
図 [1], [2] から、次の等式が成り立つことがわかる。

$$3 \quad \begin{cases} \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \\ \tan(\theta + \pi) = \tan \theta \end{cases} \quad 4 \quad \begin{cases} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

[1]



[2]



A 三角関数で成り立つ等式

教 p.129

練習
16

次の値を求めよ。

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$

(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

指針 負の角の三角関数の値 まず, p.168 のまとめのグラフの対称性を表す等式 2 を使って, 正の角の三角関数に直す。

次に, 周期性を表す等式 1 を使って角を簡単にし, 三角関数の値を求める。

解答 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 答

$\leftarrow \sin(-\theta) = -\sin\theta$

(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) = \cos\frac{13}{6}\pi$

$\leftarrow \cos(-\theta) = \cos\theta$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$

$\leftarrow \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$

$= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 答

(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -\tan\frac{9}{4}\pi$

$\leftarrow \tan(-\theta) = -\tan\theta$

$= -\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$

$\leftarrow \tan(\theta + n\pi) = \tan\theta$

$= -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ 答

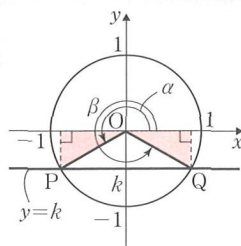
4 章
三角関数

5 三角関数の応用

まとめ

1 $\sin\theta$ を含む方程式 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- ① $\sin\theta = k$ の形に変形する。
- ② 直線 $y = k$ と単位円の交点を P, Q とする。
- ③ 動径 OP, OQ のそれぞれが表す角 α, β を求める。($\alpha < \beta$)
- ④ 解は $\theta = \alpha, \beta$



2 $\cos \theta$ を含む方程式

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- ① $\cos \theta = k$ の形に変形する。
- ② 直線 $x = k$ と単位円の交点を P, Q とする。
- ③, ④ は, 1 と同じ。

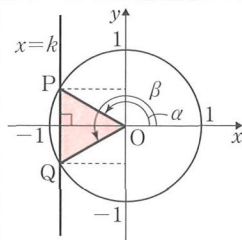
注意 (1) $k < -1$, $1 < k$ のとき, 解はない。

$k = -1$ や $k = 1$ のとき, 解は 1 つ。

- (2) α , β を求めるには, 特別な直角三角形の辺の比を使う。

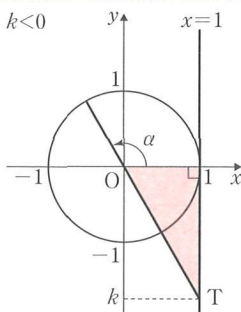
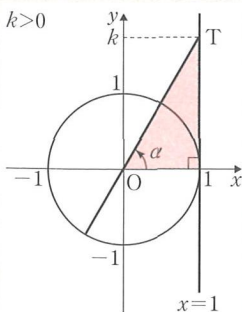
- (3) θ の範囲を制限しなければ, 解は次のようになる。

$$\theta = \alpha + 2n\pi, \beta + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

3 $\tan \theta$ を含む方程式

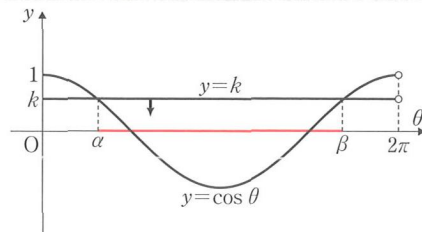
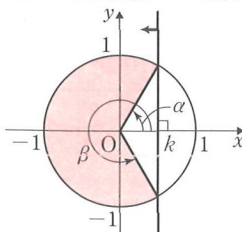
方程式 $\tan \theta = k$ を解くには

- ① 直線 $x=1$ 上で, y 座標が k となる点を T とする。
- ② $0 \leq \alpha < \pi$ の範囲で, 動径 OT, または, TO の延長上にある動径の表す角 α を求める。
- ③ 解は $\theta = \alpha + n\pi$ (n は整数)

4 不等式 $\cos \theta \leq k$ の解

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- ① 方程式 $\cos \theta = k$ を解いて $\theta = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$)
- ② 単位円または $y = \cos \theta$ のグラフから $\alpha \leq \theta \leq \beta$



注意 $\cos \theta > k$ の解は $0 \leq \theta < \alpha$, $\beta < \theta < 2\pi$

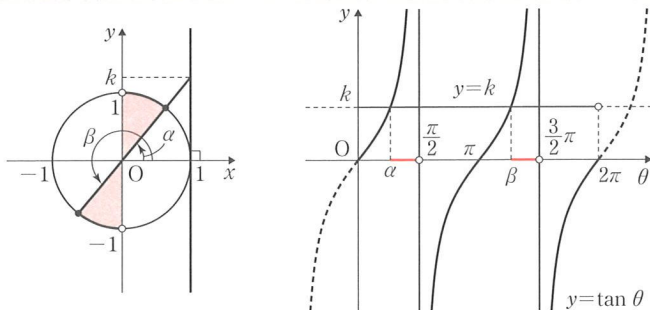
$\sin \theta$ や $\tan \theta$ についての不等式も同様に解く。

5 不等式 $\tan \theta \geq k$ の解

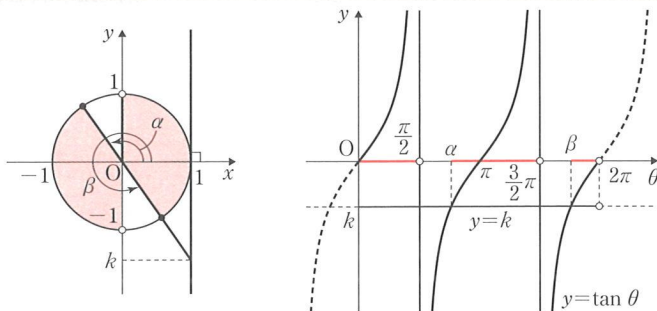
$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- ① 方程式 $\tan \theta = k$ を解いて $\theta = \alpha$, β ($\alpha < \beta$)
- ② 原点と直線 $x=1$ 上の点 $(1, k)$ を結ぶ直線と単位円との交点のつくる図または $y = \tan \theta$ のグラフから, θ の範囲を求める。

[1] $k \geq 0$ のとき, 解は $\alpha \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\beta \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$



[2] $k < 0$ のとき, 解は $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\beta \leq \theta < 2\pi$



注意 $\tan \theta > k$ や $\tan \theta \leq k$ などの不等式も同様に解く。

6 $\sin \theta$ や $\cos \theta$ を含む関数の最大・最小

- ① $\sin \theta = t$, $\cos \theta = t$ などとおき, もとの式が t だけの式にならないかを調べる。

→ t の 2 次式になる場合を考える

- ② t の範囲を調べる。
- ③ ① の 2 次式について, ② の範囲における最大値や最小値を求める。

A 三角関数を含む方程式

教 p.130

練習
17 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) 2\cos \theta + 1 = 0 \quad (3) \sin \theta + 1 = 0$$

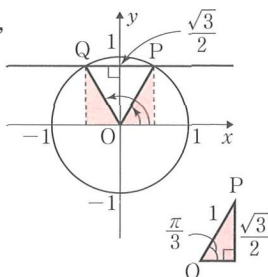
指針 $\sin \theta$ や $\cos \theta$ を含む方程式 p.169~170 のまとめの手順で解く。ただし、(3) は単位円周上で条件を満たす点は1つであり、解も1つとなる。

解答 (1) 直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P, Q とすると、

求める θ は、動径 OP, OQ の表す角である。

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \quad \text{答}$$



(2) $2\cos \theta + 1 = 0$ から

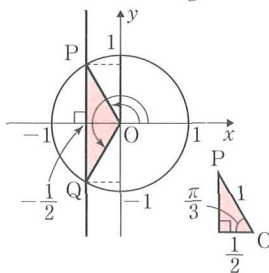
$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

直線 $x = -\frac{1}{2}$ と単位円の交点を P, Q とすると、

求める θ は、動径 OP, OQ の表す角である。

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad \text{答}$$



(3) $\sin \theta + 1 = 0$ から

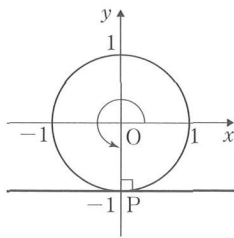
$$\sin \theta = -1$$

直線 $y = -1$ と単位円の共有点を P とすると、

求める θ は、動径 OP の表す角である。

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$\theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{答}$$



注意 θ の範囲を制限しない場合、解は次のようになる。

$$(1) \theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$(2) \theta = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi, \frac{4}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$(3) \theta = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

単位円を使って
考えよう。



練習
18

次の方程式を解け。

(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta = -1$

指針 三角関数についての方程式 θ の範囲に制限がない。 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で方程式を満たす θ を求め、周期性を用いて解を表す。

解答 (1) 方程式を変形すると

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

求める角 θ の動径と単位円の交点の y

座標は $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

したがって、方程式の解は

$$\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi, \frac{5}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{答}$$

(2) 方程式を変形すると

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

求める角 θ の動径と単位円の交点の x

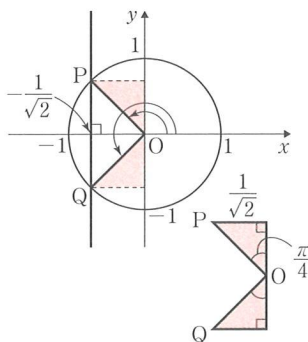
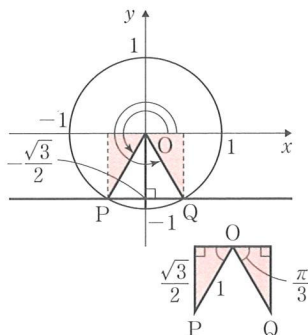
座標は $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$$

したがって、方程式の解は

$$\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, \frac{5}{4}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{答}$$

4
章

三角関数

練習
19

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $\tan\theta = -\sqrt{3}$ を解け。また、 θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

指針 $\tan\theta$ を含む方程式 p.170 のまとめの手順で解く。

まとめの図で、 $k < 0$ の場合となる。

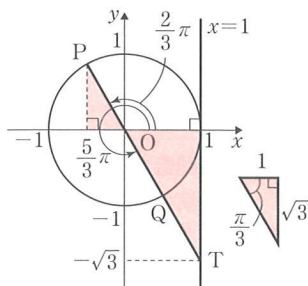
解答 点 $T(1, -\sqrt{3})$ をとり、直線 OT と単位円の交点を P, Q とすると、求める θ は、動径 OP, OQ の表す角である。

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で、方程式の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad \text{答}$$

また、 θ の範囲に制限がないとき、方程式の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{答}$$



練習
20

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

指針 $\sin(\theta + \alpha)$ や $\cos(\theta + \beta)$ を含む方程式 (1) $\theta - \frac{\pi}{6} = t$, (2) $\theta + \frac{\pi}{4} = t$ において、 $0 \leq \theta < 2\pi$ から t のとる値の範囲を求め、この範囲で、(1) $\sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解く。

解答 (1) $\theta - \frac{\pi}{6} = t$ とおくと $\sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

であるから、この範囲で解くと

$$t = \frac{5}{4}\pi \text{ または } t = \frac{7}{4}\pi$$

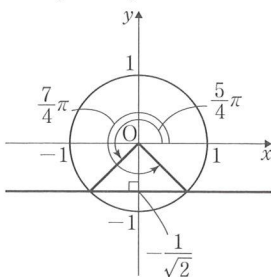
すなわち

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi \text{ または } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{よって } \theta = \frac{17}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi \quad \text{答}$$

$$\leftarrow 0 - \frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6} \text{ から}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$



$$(2) \theta + \frac{\pi}{4} = t \text{ とおくと } \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$$

であるから、この範囲で解くと

$$t = \frac{11}{6}\pi \text{ または } t = \frac{13}{6}\pi$$

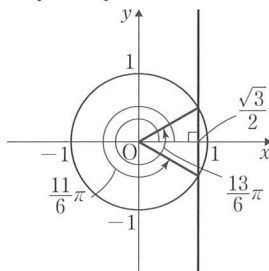
すなわち

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{6}\pi \text{ または } \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{6}\pi$$

$$\text{よって } \theta = \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi \quad \text{答}$$

$$\leftarrow 0 + \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$$



B 三角関数を含む不等式

教 p.132

練習
21

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

$$(1) \cos \theta \leq \frac{1}{2} \quad (2) \sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3) \sin \theta < \frac{1}{2}$$

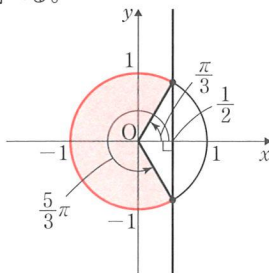
指針 $\sin \theta$ や $\cos \theta$ についての不等式 単位円を利用する場合、(1) は円周上の x 座標が $\frac{1}{2}$ 以下の点の範囲、(2) は円周上の y 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ より大きい点の範囲、(3) は円周上の y 座標が $\frac{1}{2}$ より小さい点の範囲を調べる。

解答 (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos \theta = \frac{1}{2}$ となる

$$\theta \text{ は } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

よって、不等式の解は、図から

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi \quad \text{答}$$

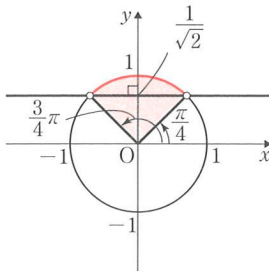


(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とな

$$\text{る } \theta \text{ は } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

よって、不等式の解は、図から

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi \quad \text{答}$$

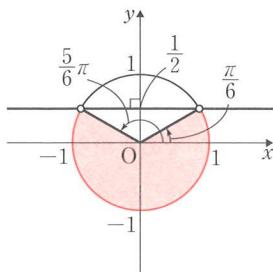


(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

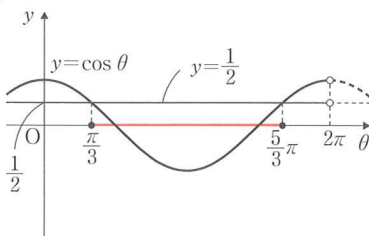
よって、不等式の解は、右の図から

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad \text{答}$$

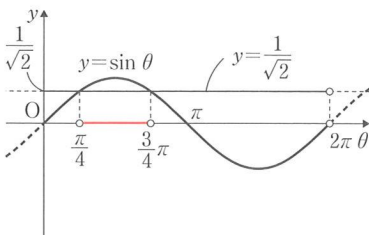


注意 不等式は、三角関数のグラフと直線の位置関係を利用して解くこともできる。

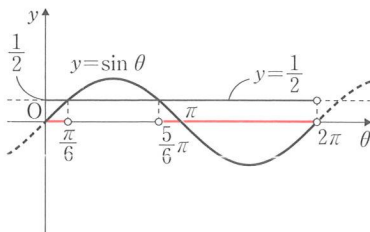
(1) $y = \cos \theta$ のグラフで、直線 $y = \frac{1}{2}$ およびその下側にある部分の θ の値の範囲を調べる。



(2) $y = \sin \theta$ のグラフで、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より上側にある部分の θ の値の範囲を調べる。



(3) $y = \sin \theta$ のグラフで、直線 $y = \frac{1}{2}$ より下側にある部分の θ の値の範囲を調べる。



単位円やグラフを
かいて解くと、
解が見てわかるね。



練習
22

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、不等式 $\tan \theta \leq \sqrt{3}$ を解け。

指針 $\tan \theta$ についての不等式 直線 $x=1$ 上の y 座標が $\sqrt{3}$ 以下の点と原点を通る直線が、単位円と重なる部分から解を求める。

なお、 $\tan \theta$ は、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ では定義されないことに注意する。

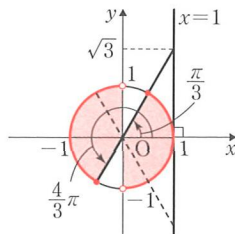
解答 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan \theta = \sqrt{3}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$$

よって、不等式の解は、図から

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{4}{3}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \quad \text{答}$$

4
章

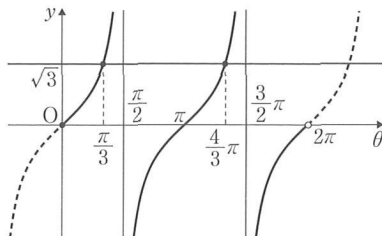
三角関数

別解 $0 \leq \theta < 2\pi$ における $y = \tan \theta$ のグラフは右の図のようになる。

直線 $y = \sqrt{3}$ およびその下側にある θ の値の範囲を求めると、図から

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{4}{3}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \quad \text{答}$$



C 三角関数を含む関数の最大値、最小値

練習
23

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数 $y = \cos^2 \theta - \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ。
また、そのときの θ を値を求めよ。

指針 $\sin \theta, \cos \theta$ を含む関数の最大・最小 $\cos \theta = t$ とおくと、もとの式は t の 2 次関数となる。ただし、 $\cos \theta = t$ とおいたとき、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ から $-1 \leq t \leq 1$ となることを確認する。この範囲における 2 次関数の最大値と最小値を求める。

解答 $\cos \theta = t$ とおくと, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから,
 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より $-1 \leq t \leq 1$ …… ①

y を t で表すと $y = t^2 - t$

すなわち $y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

よって, ① の範囲において, y は

$t = -1$ で最大値 2 をとり,

$t = \frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。

また, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

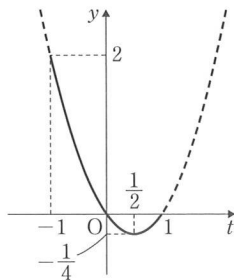
$t = -1$ のとき $\theta = \pi$

$t = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

したがって, この関数は

$\theta = \pi$ で最大値 2 をとり,

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。 



最大・最小は
定義域に注意
しよう!



第4章 第1節

問題

教 p.135

1 $\tan \theta = -2$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ。

指針 三角関数の相互関係 $\tan \theta$ の値が与えられているから, 三角関数の相互関係のうち $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ の関係を用いて $\cos \theta$ の値を求め, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ より $\sin \theta$ の値を求める。ただし, θ の動径がどの象限にあるかに注意しなくてはならない。 $\tan \theta = -2$ で, 負の数であるから, $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の符号は異なる。

解答 $\tan \theta < 0$ から, θ の動径は第2象限または第4象限にある。

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (-2)^2 = 5$$

$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

θ の動径が第2象限にあるとき, $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

θ の動径が第4象限にあるとき, $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

以上から

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ または}$$

$$\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{答}$$

4章

三角関数

2 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1) $y = -\tan \theta$

(2) $y = 3 \cos \frac{\theta}{2}$

(3) $y = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$

(4) $y = \sin 3\theta + 1$

指針 三角関数のグラフと周期 グラフは (1) $y = \tan \theta$ のグラフを θ 軸に関して対称に折り返す。

(2) $y = \cos \theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向に 3 倍に拡大し、さらに y 軸をもとにして θ 軸方向に 2 倍に拡大する。

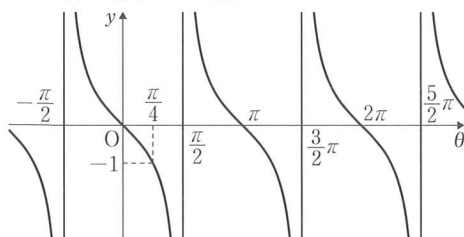
(3) $y = \sin \theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向に 2 倍に拡大し、さらに θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動する。

(4) $y = \sin \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍に縮小し、さらに y 軸方向に 1 だけ平行移動する。

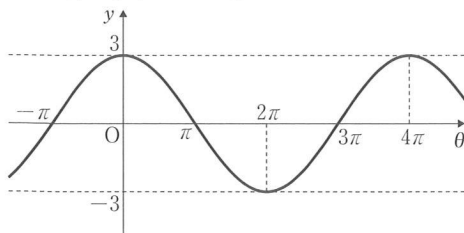
周期は、 $y = a \sin k(\theta$ の式)、 $y = b \cos k(\theta$ の式) なら $\frac{2\pi}{k}$ 、 $y = c \tan k(\theta$ の式)

なら $\frac{\pi}{k}$

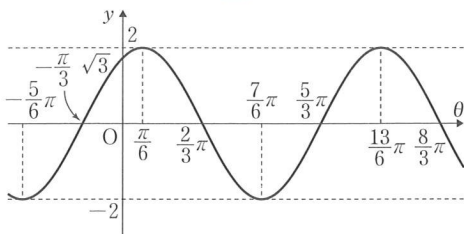
解答 (1) 〔図〕, 周期は π **答**



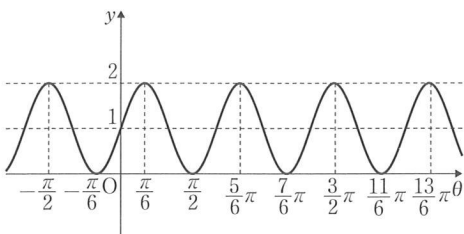
(2) 〔図〕, 周期は 4π **答**



- (3) [図], 周期は
- 2π
- 答



- (4) [図], 周期は
- $\frac{2}{3}\pi$
- 答



教 p.135

- 3
- $0 \leq \theta < 2\pi$
- のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

(1) $2\sqrt{3} \cos \theta - 3 = 0$

(2) $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$

(3) $2 \sin \theta + \sqrt{3} < 0$

(4) $\tan \theta + \sqrt{3} \leq 0$

(5) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

指針 三角関数を含む方程式・不等式 $0 \leq \theta < 2\pi$ に注意。

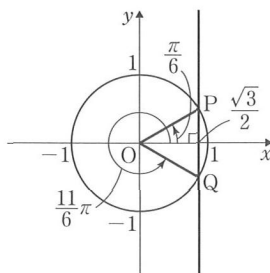
- (1) $\cos \theta = k$ の形に変形し, 単位円上で x 座標が k となるときの θ を求める。
- (2) $\tan \theta = k$ の形に変形し, 直線 $x=1$ 上の点 $(1, k)$ と原点を結ぶ直線と単位円の交点を P, Q として θ を求める。
- (3) $\sin \theta < k$ の形に変形し, 図を利用して解く。
- (4) $\tan \theta \leq k$ の形に変形し, 図を利用して解く。
- (5) $\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおいて, $0 \leq \theta < 2\pi$ のときの t の範囲を求め, この範囲内で, 方程式を解く。
- (6) (5) の結果と図を利用する。

解答 (1) 方程式を変形すると $\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

図のように、単位円上の点で x 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$

となる点 P, Q に対して、動径 OP, OQ の角 θ が求める角で、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi \quad \text{答}$$



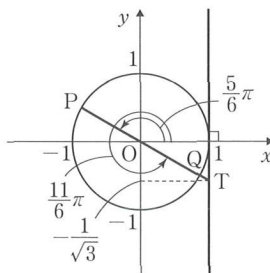
(2) 方程式を変形すると $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

図のように、直線 $x=1$ 上の点

$T(1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ と原点を結ぶ直線と単位円の

交点を P, Q とすると、動径 OP, OQ の角 θ が求める角で、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \text{答}$$



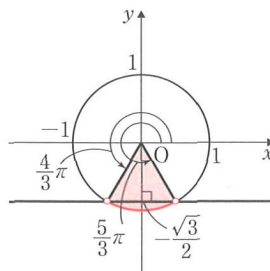
(3) 不等式を変形すると $\sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ

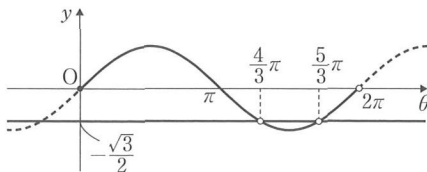
$$\text{は } \theta = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

よって、不等式の解は

$$\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi \quad \text{答}$$



別解 $0 \leq \theta < 2\pi$ における $y = \sin \theta$ のグラフは下の図のようになる。



直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある θ の値の範囲を求めると、図から

$$\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi \quad \text{答}$$

- (4) 不等式を変形すると $\tan \theta \leq -\sqrt{3}$
 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan \theta = -\sqrt{3}$ となる

$$\theta \text{ は } \theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

よって、不等式の解は

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi < \theta \leq \frac{5}{3}\pi \quad \text{答}$$

- (5) $\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ①

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{すなわち } \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi$$

この範囲で ① を解くと

$$t = \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{すなわち } \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

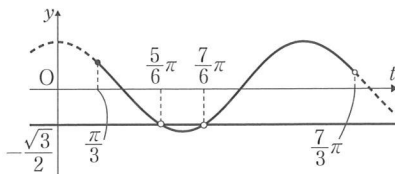
$$\text{よって } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi \quad \text{答}$$

- (6) $\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと、(5) より不等式の解は

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi < t < \frac{7}{3}\pi$$

$$\text{すなわち } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad \text{答}$$

別解 $\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi$ における $y = \cos t$ のグラフは下の図のようになる。

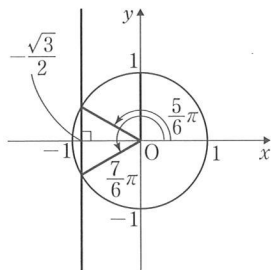
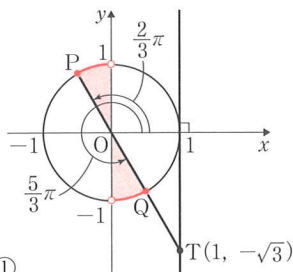


直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より上側にある t の値の範囲を求めると、図から

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi < t < \frac{7}{3}\pi$$

$$t = \theta + \frac{\pi}{3} \text{ から}$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad \text{答}$$



- 4 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数 $y = \sin^2 \theta - \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ。
また、そのときの θ の値を求めよ。

指針 $\sin \theta, \cos \theta$ を含む関数の最大・最小 $\cos \theta = t$ とおき、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の関係を用いて、式を t の2次関数で表す。

このとき、 t の範囲は $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ から $-1 \leq t \leq 1$

この範囲で、 t の2次関数の最大・最小を調べる。

解答 $\cos \theta = t$ とおくと、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より

$$-1 \leq t \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

y を t で表すと $y = (1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta = -t^2 - t + 1$

$$\text{すなわち} \quad y = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって、 $\textcircled{1}$ の範囲において、 y は

$$t = -\frac{1}{2} \text{ で最大値 } \frac{5}{4} \text{ をとり、}$$

$$t = 1 \text{ で最小値 } -1 \text{ をとる。}$$

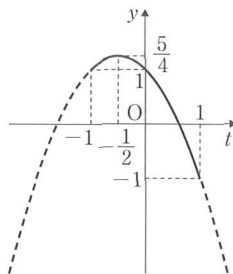
また、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、

$$t = -\frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

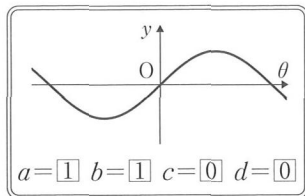
$$t = 1 \text{ のとき} \quad \theta = 0$$

したがって、この関数は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \text{ で最大値 } \frac{5}{4}, \theta = 0 \text{ で最小値 } -1 \text{ をとる。} \quad \text{答}$$



- 5 関数 $f(\theta) = a \sin(b\theta + c) + d$ について、 a, b, c, d の値に応じた $y = f(\theta)$ のグラフが表示されるコンピュータソフトがある。いま、 $a = b = 1, c = d = 0$ として、 $y = \sin \theta$ のグラフが表示されている。この状態から、 a, b, c, d の値の



うち、いずれか 1 つの値だけ変化させたとき、次の ①～③ の変化が起こりうるのは、どの値を変化させたときか、それぞれすべて答えよ。

- ① 関数 $f(\theta)$ の周期が変わった。
- ② 関数 $f(\theta)$ の最大値と最小値が変わった。
- ③ 関数 $f(\theta)$ が奇関数から偶関数に変わった。

指針 三角関数のグラフ

a の値だけ変化させると、 $y = \sin \theta$ のグラフは、 θ 軸をもとにして y 軸方向に拡大(縮小)される。

b の値だけ変化させると、 $y = \sin \theta$ のグラフは、 y 軸をもとにして θ 軸方向に拡大(縮小)される。

c の値だけ変化させると、 $y = \sin \theta$ のグラフは、 θ 軸方向に平行移動される。

d の値だけ変化させると、 $y = \sin \theta$ のグラフは、 y 軸方向に平行移動される。

- 解答**
- ① 周期が変わるのは、 b の値を変化させたときである。
 - ② 最大値と最小値が変わるのは、 a, d の値を変化させたときである。
 - ③ 奇関数から偶関数に変わるのは、 c の値を変化させたときである。

答 ① b ② a, d ③ c

第2節 加法定理

6 加法定理

まとめ

1 正弦・余弦の加法定理

$$1 \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$2 \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$3 \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$4 \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

2 正接の加法定理

$$5 \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$6 \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

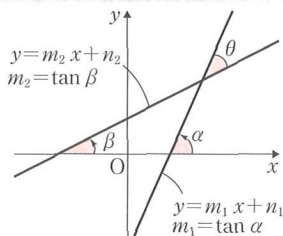
注意 5で β を $-\beta$ におき換えると6が得られる。

$$\leftarrow \tan(-\beta) = -\tan \beta$$

3 2直線のなす角

交わる2直線 $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$ が垂直でないとき、そのなす鋭角を θ とすると

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \end{aligned}$$



A 正弦・余弦の加法定理

教 p.137

深める

教科書 128, 129 ページの 1 ~ 4 の等式のうち、正弦と余弦に関する等式について、等式が成り立つことを、加法定理を用いて確かめよう。

$$\begin{aligned} \text{解答 } 1 \quad \sin(\theta + 2n\pi) &= \sin \theta \cos 2n\pi + \cos \theta \sin 2n\pi \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta + 2n\pi) &= \cos \theta \cos 2n\pi - \sin \theta \sin 2n\pi \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \sin(-\theta) &= \sin(0 - \theta) = \sin 0 \cos \theta - \cos 0 \sin \theta \\ &= -\sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-\theta) &= \cos(0-\theta) = \cos 0 \cos \theta + \sin 0 \sin \theta \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \quad \sin(\theta+\pi) &= \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi \\ &= -\sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\pi) &= \cos \theta \cos \pi - \sin \theta \sin \pi \\ &= -\cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \quad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -\sin \theta\end{aligned}$$

練習
24

教 p.138

加法定理を用いて、 $\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

指針 加法定理と余弦の値 $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ であるから、 $\cos(\alpha+\beta)$ についての加法定理を使う。

解答 $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) \qquad \leftarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{答}$$

← 分母の有理化

練習
25

教 p.138

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて、 $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

指針 加法定理と正弦・余弦の値

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \text{ を使う。}$$

解答 $\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{答}$$

← 分母の有理化

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

← 分母の有理化

練習

26

α の動径が第 2 象限, β の動径が第 1 象限にあり, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ のとき, $\sin(\alpha - \beta)$ と $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

教 p.138

指針 相互関係と加法定理 $\cos \alpha$, $\sin \beta$ の値がわかれば, 加法定理により値が求められる。動径のある象限から, $\cos \alpha$, $\sin \beta$ の符号を判断し, 相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて, $\cos \alpha$, $\sin \beta$ の値を求める。

解答

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{5}{9}$$

α の動径が第 2 象限にあるとき, $\cos \alpha < 0$ であるから

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{また } \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25}$$

β の動径が第 1 象限にあるとき, $\sin \beta > 0$ であるから

$$\sin \beta = \frac{4}{5}$$

よって $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{6+4\sqrt{5}}{15} \quad \text{答}$$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3\sqrt{5}+8}{15} \quad \text{答}$$

B 正接の加法定理

教 p.139

練習

27

加法定理を用いて, $\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

指針 加法定理と正接の値 $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ であるから, $\tan(\alpha + \beta)$ についての加法定理を使う。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 } \tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} && \leftarrow \tan(\alpha + \beta) \\
 &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} && = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\
 &= -\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = -\frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} && \leftarrow \text{分母の有理化} \\
 &= -\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

練習
28

教 p.139

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて, $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

指針 加法定理と正接の値 等式 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ を使う。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 } \tan \frac{\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) && \leftarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1, \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} && \leftarrow \text{分母, 分子に } \sqrt{3} \text{ を掛ける。} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

c 正接の加法定理と2直線のなす角

教 p.140

練習
29

2 直線 $y = 2x - 1$, $y = \frac{1}{3}x + 1$ のなす角 θ を求めよ。ただし,

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

指針 2 直線のなす角 それぞれの直線と平行で原点を通る 2 直線 $y = 2x$, $y = \frac{1}{3}x$ のなす角に等しい。ここで, 原点を通る直線 $y = mx$ について, この直線 $y = mx$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると, $\tan \theta = m$ である。このことと正接の加法定理を利用して, 2 直線のなす角を求める。

解答 2 直線 $y = 2x - 1$, $y = \frac{1}{3}x + 1$ とそれぞれ平行で原点を通る 2 直線は

$$y = 2x, \quad y = \frac{1}{3}x$$

求める 2 直線のなす角 θ は, これら原点を通る 2 直線のなす角 θ に等しい。

4
章

三角関数

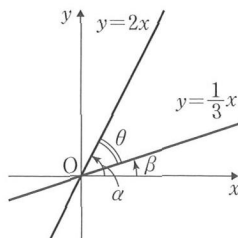
これら2直線と x 軸の正の向きとのなす角を、それぞれ α , β とすると、図から $\theta = \alpha - \beta$ である。

$$\tan \alpha = 2, \quad \tan \beta = \frac{1}{3}$$

であるから $\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1 \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \frac{\pi}{4}$ 答



研究 加法定理と点の回転

まとめ

回転した点の座標

点 $P(a, b)$ を原点 O を中心として角 θ だけ回転した位置にある点 Q の座標の求め方

- ① $OP=r$, 動径 OP と x 軸の正の向き
のなす角を α とすると

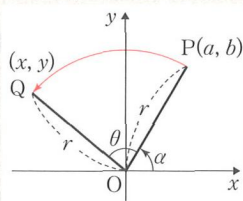
$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha$$

- ② 点 Q の座標を (x, y) とすると

$$x = r \cos(\alpha + \theta), \quad y = r \sin(\alpha + \theta)$$

この式を加法定理を使って展開すると、

x, y をそれぞれ a, b, θ を用いて表すことができる。



練習

1

点 $P(4, 3)$ を、原点 O を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した位置にある点 Q の座標を求めよ。

教 p.141

指針 加法定理と点の回転 $OP=r$, 動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると、 P の座標は $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, Q の座標は

$(r \cos(\alpha + \frac{\pi}{6}), r \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}))$ 加法定理を使って展開して、 Q の座標を r, α を含まない値で表す。

解答 点 P(4, 3) について, $OP=r$, 動径 OP と x 軸の正の向きのなす角を α とすると

$$4=r\cos\alpha, \quad 3=r\sin\alpha$$

点 Q の座標を (x, y) とすると

$$x=r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right), \quad y=r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$

よって, 加法定理により

$$\begin{aligned} x &= r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) \\ &= r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

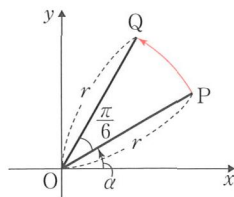
$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}-3}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) \\ &= r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}+4}{2}$$

したがって, 点 Q の座標は

$$\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+4}{2}\right) \quad \text{答}$$



4 章

三角関数

7 加法定理の応用

まとめ

1 2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\leftarrow \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$

$$\leftarrow \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$

$$\leftarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \text{ を代入}$$

$$\leftarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \text{ を代入}$$

$$\leftarrow \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \text{ の分母・分子を } \cos^2\alpha \text{ で割る}$$

2倍角の公式から

$$\left. \begin{aligned} \leftarrow \sin^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \leftarrow \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \leftarrow \tan^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \end{aligned} \right\} \alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$$

2 半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

3 三角関数の合成

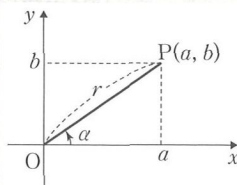
$a \sin \theta + b \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形することを、三角関数を合成するという。

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

解説 右の図のように、座標平面上に点 $P(a, b)$ をとり、線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とする。

注意 α が図のみから求められないこともある。



A 2倍角の公式

教 p.142

練習
30

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で、 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき、次の値を求めよ。

- (1) $\sin 2\alpha$ (2) $\cos 2\alpha$ (3) $\tan 2\alpha$

指針 2倍角の三角関数の値 正弦・余弦・正接の2倍角の公式を利用する。

解答 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ から $\sin \alpha > 0$

$$\text{よって } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \quad \text{答}$$

$$(2) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \text{答}$$

$$(3) (1), (2) \text{ から } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \div \frac{1}{9} = -4\sqrt{5} \quad \text{答}$$

別解 (3) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ から

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = -4\sqrt{5} \quad \text{答}$$

練習
31

教 p.142

$3\alpha = 2\alpha + \alpha$ であることを用いて、次の等式を証明せよ。

- (1) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ (2) $\cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$

指針 等式の証明 左辺を変形して右辺を導く。2倍角の公式、 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を利用する。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 3\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad \text{終} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = -3\cos \alpha + 4\cos^3 \alpha \quad \text{終} \end{aligned}$$

ここで証明した等式を
3倍角の公式といいます。



4章

三角関数

B 半角の公式

教 p.143

練習 32

半角の公式を用いて、次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{\pi}{8} \quad (2) \sin \frac{3}{8}\pi \quad (3) \cos \frac{3}{8}\pi$$

指針 半角の公式と正弦・余弦の値 $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)$, $\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\pi \right)$ であるから、正弦・余弦の半角の公式に $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$ を代入し、まず $\sin^2 \frac{\pi}{8}$, $\sin^2 \frac{3}{8}\pi$, $\cos^2 \frac{3}{8}\pi$ の値を求める。

$$\text{解答 (1)} \quad \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ であるから} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \sin^2 \frac{3}{8}\pi &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\sin \frac{3}{8}\pi > 0 \text{ であるから} \quad \sin \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad \cos^2 \frac{3}{8}\pi &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{3}{8}\pi > 0 \text{ であるから} \quad \cos \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{答}$$

練習
33

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ のとき, 次の値を求めよ。

(1) $\sin \frac{\alpha}{2}$ (2) $\cos \frac{\alpha}{2}$ (3) $\tan \frac{\alpha}{2}$

指針 半角の公式 まず $\frac{\alpha}{2}$ の値の範囲を求めて, 半角の公式を用いる。

解答 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ から $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

このとき $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$

(1) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2} = \frac{9}{10}$

$\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ **答**

(2) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}{2} = \frac{1}{10}$

$\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ **答**

(3) $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 9$

$\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$ **答**

別解 (3) (1), (2) から $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} \div \frac{1}{\sqrt{10}} = 3$ **答**

C 三角関数を含む方程式, 不等式

練習
34

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta + \sin \theta = 1$ (2) $\cos 2\theta + \sin \theta > 1$

指針 $\sin 2\theta$ や $\cos 2\theta$ を含む方程式

(1) 余弦の2倍角の公式には, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ の他に
 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$, $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ があるが, 方程式の他の項に合わせ
 て1つを選ぶ。

(2) (1)の結果を利用する。

解答 (1) 左辺を変形すると $(1 - 2\sin^2 \theta) + \sin \theta = 1$

$$\text{整理すると} \quad 2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$$

$$\text{左辺を因数分解して} \quad \sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\text{よって} \quad \sin\theta = 0 \quad \text{または} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

$$\sin\theta = 0 \text{ から} \quad \theta = 0, \pi$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \text{ から} \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \text{答} \quad \theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$$

(2) 不等式を変形すると, (1) から

$$\sin\theta(2\sin\theta - 1) < 0$$

$$\text{よって} \quad 0 < \sin\theta < \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi \quad \text{答}$$

1つの三角関数の式にして解こう。



4章

三角関数

D 三角関数の合成

練習
35

教 p.145

次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に表せ。ただし, $r > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

(2) $\sin\theta - \cos\theta$

指針 $a\sin\theta + b\cos\theta$ の変形 $a\sin\theta + b\cos\theta$ を $r\sin(\theta + \alpha)$ に変形する。(1) では $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, (2) では $a = 1$, $b = -1$ である。

r の値は, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ として求める。

角 α は, 点 $P(a, b)$ をとり, 線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角として求める。

解答 (1) $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

点 $P(\sqrt{3}, 1)$ をとると, 図より,

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ となるから}$$

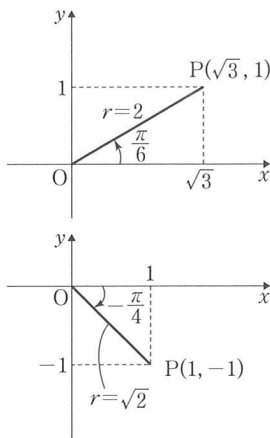
$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{答}$$

(2) $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

点 $P(1, -1)$ をとると, 図より,

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} \text{ となるから}$$

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{答}$$



練習
36

教 p.146

 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

指針 方程式 $a \sin x + b \cos x = c$ 方程式の左辺の三角関数を合成して、 $r \sin(x + \alpha)$ の形に変形する。次に、 $x + \alpha$ の範囲に注意して、 $\sin(x + \alpha)$ の値から $x + \alpha$ を求める。

解答 左辺の三角関数を合成すると

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\text{よって} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

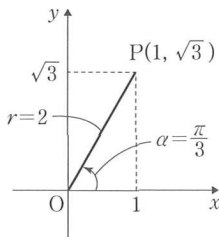
$0 \leq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

であるから、この範囲で①を解くと

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$\text{したがって} \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi \quad \text{答}$$

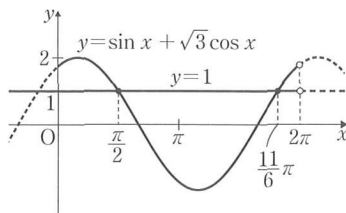


注意 上で求めた方程式の解は、
 $0 \leq x < 2\pi$ における 2 つの関数

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x,$$

$$y = 1$$

のグラフの交点の x 座標である。

練習
37

教 p.147

次の関数の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sqrt{3} \sin x + \cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

指針 関数 $y = a \sin x + b \cos x$ の最大・最小、グラフ $y = r \sin(x + \alpha)$ の形に変形して考える。最大・最小は、変域に注意する。

$y = r \sin(x + \alpha)$ のグラフは、 $y = \sin x$ のグラフを

- ① x 軸をもとにして y 軸方向へ r 倍に拡大・縮小し、
- ② さらに、 x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動したものだ。

解答 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ であるから

$$y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 \leq x < 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ であるから

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \quad \text{よって} \quad -2 \leq y \leq 2$$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ のとき, $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ から $x = \frac{\pi}{3}$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ のとき, $x + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi$ から $x = \frac{4}{3}\pi$

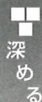
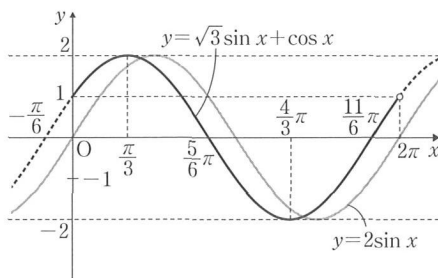
よって, この関数は

$x = \frac{\pi}{3}$ で最大値 2 をとり,

$x = \frac{4}{3}\pi$ で最小値 -2 をとる。 答

注意 関数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($0 \leq x < 2\pi$) のグラフは, $y = \sin x$ のグラフを x 軸をも

とにして y 軸方向へ 2 倍に拡大し, さらに, x 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもので, 図のようになる。



深める

教 p.147

教科書の応用例題 5 について, 次の解答が誤りである理由を説明しよう。

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{より} \quad -2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$$

よって y の最大値は 2, 最小値は -2

指針 関数 $y = a \sin x + b \cos x$ の最大・最小 最大値, 最小値をとる x の値を考える。

解答 $-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$ より, $y = 2$ となるのは, $\sin x = 1$ かつ $\cos x = 1$ のときであるが, これを満たす x の値は存在しない。

同様に, $y = -2$ となる x の値も存在しない。

よって, 上の解答は誤りである。

第4章 第2節

問題

教 p.149

- 6 α, β の動径がいずれも第4象限にあり、 $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha - \beta)$

(2) $\cos(\alpha + \beta)$

指針 相互関係と加法定理 $\sin \alpha, \cos \beta$ の値がわかっているから $\cos \alpha, \sin \beta$ の値がわかれば、加法定理により値が求められる。 α, β が第4象限にあることに注意し、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて、 $\cos \alpha, \sin \beta$ の値をまず求める。

解答 α, β の動径が第4象限にあるから

$$\cos \alpha > 0, \sin \beta < 0$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

$$\text{であるから} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\text{であるから} \quad \sin \beta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$(1) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= -\frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{33}{65} \quad \text{答}$$

$$(2) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{65} \quad \text{答}$$

教 p.149

- 7 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線で、原点を通るものの方程式を求めよ。

指針 2 直線のなす角 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ と平行で原点を通る直線は $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で

あるから、この直線とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線で、原点を通るものの方程式

を求めればよい。直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると、

求める直線の傾きは $\tan\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$ である。

解答 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ と x 軸の正の向きとのな

す角は $\frac{\pi}{6}$ であるから、求める直線と x 軸の

正の向きとのなす角は

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$$

すなわち、求める直線の傾きは

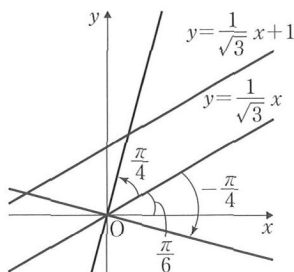
$$\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = \sqrt{3} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{-2} = \sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

よって、求める直線の方程式は

$$y = (\sqrt{3} + 2)x, \quad y = (\sqrt{3} - 2)x \quad \text{答}$$



8 次の等式を証明せよ。

$$(1) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha \quad (2) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$$

指針 等式の証明 左辺を変形して右辺を導く。2倍角の公式、 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ を利用する。

解答 (1) 左辺 $= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2倍角の公式により $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

よって $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$ **終**

(2) 2倍角の公式により

$$\text{左辺} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (2 \cos^2 \alpha - 1)} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \text{右辺}$$

よって $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$ **終**

9 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta = \sin \theta$

(2) $\cos 2\theta < \sin \theta + 1$

指針 $\sin 2\theta$ や $\cos 2\theta$ を含む方程式、不等式 2倍角の公式を利用。

(1) $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の方程式になるが因数分解できる。

(2) $\sin \theta$ の2次不等式が得られる。

解答 (1) 左辺を変形すると $2\sin \theta \cos \theta = \sin \theta$

整理すると $\sin \theta (2\cos \theta - 1) = 0$

よって $\sin \theta = 0$ または $2\cos \theta - 1 = 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

$\sin \theta = 0$ から $\theta = 0, \pi$

$2\cos \theta - 1 = 0$ から $\cos \theta = \frac{1}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

したがって、求める解は $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ 答

(2) 左辺を変形すると

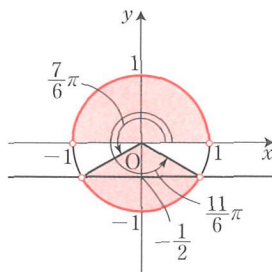
$1 - 2\sin^2 \theta < \sin \theta + 1$

整理すると $\sin \theta (2\sin \theta + 1) > 0$

よって $\sin \theta < -\frac{1}{2}$ または $0 < \sin \theta$

したがって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

$0 < \theta < \pi, \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$ 答



10 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{3} \sin x - \cos x \leq \sqrt{3}$

指針 三角関数の合成と方程式、不等式 $a \sin x + b \cos x$ を $r \sin(x + \alpha)$ の形に変形して、(1) $\sin(x + \alpha) = k$ の方程式 (2) $\sin(x + \alpha) \leq k$ の不等式をそれぞれ解く。 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、 $x + \alpha$ の範囲に気をつけること。

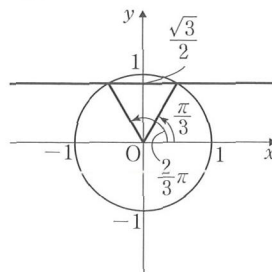
解答 (1) 左辺の三角関数を合成すると

$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

よって $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ①

$0 \leq x < 2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$



であるから、この範囲で①を解くと

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \text{または} \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{したがって} \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi \quad \text{答}$$

$$(2) \text{ 不等式を変形すると, (1) から } \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

この範囲で②を解くと

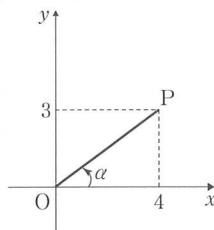
$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{または} \quad \frac{2}{3}\pi \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{したがって} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi \quad \text{答}$$

教 p.149

11 次の問いに答えよ。

- (1) 右の図のように、座標が (4, 3) である点を P とし、動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とする。このとき、 $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ の値を求めよ。



- (2) $4\sin x + 3\cos x = r\sin(x + \alpha)$ を満たす r の値を求めよ。
- (3) 関数 $y = 4\sin x + 3\cos x$ の最大値、最小値を求めよ。

指針 三角関数の合成と最大、最小

(2) 加法定理を利用する。

(3) $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ を利用する。

解答 (1) $OP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ であるから $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 答

$$\begin{aligned} (2) \quad 4\sin x + 3\cos x &= 5\left(\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x\right) \\ &= 5(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) \\ &= 5\sin(x + \alpha) \end{aligned}$$

よって $r = 5$ 答

(3) $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ であるから $-5 \leq y \leq 5$

よって y の最大値は 5, 最小値は -5 答

第4章 章末問題A

教 p.150

1. 次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{16}{3} \pi \quad (2) \cos \frac{7}{2} \pi \quad (3) \tan \left(-\frac{11}{6} \pi \right)$$

指針 三角関数の値 0 から 2π までの角に直して考える。 n を整数とすると

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta, \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta, \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta$$

解答 (1) $\sin \frac{16}{3} \pi = \sin \left(\frac{4}{3} \pi + 4\pi \right) = \sin \frac{4}{3} \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 答

(2) $\cos \frac{7}{2} \pi = \cos \left(\frac{3}{2} \pi + 2\pi \right) = \cos \frac{3}{2} \pi = 0$ 答

(3) $\tan \left(-\frac{11}{6} \pi \right) = \tan \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 答

注意 考え方は1通りではない。

(1) $\sin \frac{16}{3} \pi = \sin \left(-\frac{2}{3} \pi + 6\pi \right)$ (2) $\cos \frac{7}{2} \pi = \cos \left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi \right)$ など。

教 p.150

2. $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$ のとき、次の式の値を求めよ。ただし、 θ の動径は第4象限にあるとする。

$$(1) \sin \theta - \cos \theta \quad (2) \sin^3 \theta - \cos^3 \theta$$

指針 三角関数の式の値

(1) まず、 $(\sin \theta - \cos \theta)^2$ の値を求める。 θ の動径が第4象限にあることから、 $\sin \theta - \cos \theta$ の符号を決める。

(2) 因数分解して、(1)を利用する。

解答 (1) $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ $\leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
 $= 1 - 2\sin \theta \cos \theta$
 $= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2}$

θ の動径は第4象限にあるから $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

よって $\sin \theta - \cos \theta < 0$

したがって $\sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 答

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= (\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta)$
 $= \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) = -\frac{3\sqrt{6}}{8}$ 答

別解 (2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

$$\begin{aligned}
 &= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{6}}{8} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.150

3. 次の等式を証明せよ。

$$(1) \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1-\cos \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} \quad (2) \frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta = \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

指針 等式の証明 左辺を変形して右辺を導いてみる。(1)は三角関数の相互関係を,
(2)はさらに2倍角の公式を用いる。

解答 (1) 左辺 $= \frac{1-\cos \theta}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} + \frac{1+\cos \theta}{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)}$
 $= \frac{(1-\cos \theta) + (1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} = \frac{2}{1-\cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} = \text{右辺}$

よって $\frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1-\cos \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} \quad \text{終}$

(2) 左辺 $= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= \frac{2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \text{右辺}$

$$\leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\leftarrow 2 \text{ 倍角の公式}$$

よって $\frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta = \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad \text{終}$

教 p.150

4. $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \cos 2x = \sin x \quad (2) \cos 2x < \sin x$$

指針 2倍角の公式と三角関数についての方程式

$\cos 2x$ についての2倍角の公式 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ のうち, (1), (2) ともに
 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ を用いて, 方程式を $\sin x$ だけの式にして解く。

解答 (1) 左辺を変形すると $1 - 2\sin^2 x = \sin x$
 整理して $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
 左辺を因数分解すると $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

よって $\sin x = \frac{1}{2}$ または $\sin x = -1$

 $0 \leq x < 2\pi$ のとき

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ から } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\sin x = -1 \text{ から } x = \frac{3}{2}\pi$$

したがって $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$ 答

(2) (1)より, 不等式を変形すると $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) > 0$

常に $\sin x + 1 \geq 0$ が成り立つから

$$\sin x + 1 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad 2\sin x - 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad \sin x > \frac{1}{2}$$

これを解いて $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ 答

教 p.150

5. 次の等式が成り立つことを確かめよ。ただし, 加法定理を用いてよい。

$$(1) \begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

指針 加法定理と等式の証明 加法定理を用いた後の式で, $\sin \pi, \cos \pi, \sin \frac{\pi}{2},$

$\cos \frac{\pi}{2}$ をそれぞれ数値でおき換える。

解答 (1) $\sin(\pi - \theta) = \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta$
 $= 0 \cdot \cos \theta - (-1) \cdot \sin \theta = \sin \theta$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta$$

$$= (-1) \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta = -\cos \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\tan \pi - \tan \theta}{1 + \tan \pi \tan \theta} = \frac{0 - \tan \theta}{1 + 0 \cdot \tan \theta} = -\tan \theta \quad \text{終}$$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{2} \sin \theta$
 $= 1 \cdot \cos \theta - 0 \cdot \sin \theta = \cos \theta$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta$$

$$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \quad \text{終}$$

注意 (1) $\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$ としてもよい。

(2) $\tan \frac{\pi}{2}$ は定義されないから, 正接の加法定理を使って証明することはできない。

6. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数 $y = \frac{1}{2} \cos 2\theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2}$ の最小値と、そのときの θ の値を求めよ。

指針 三角関数を含む関数の最小値 余弦の2倍角の公式のうち、
 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ を用いて、まず関数を $\sin \theta$ だけの式で表す。さらに
 $\sin \theta = x$ とすると、 y は x の2次関数となり、この関数の最小値を求める。 x
 の値の範囲に注意する。

解答 $\frac{1}{2} \cos 2\theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2 \theta) + 2 \sin \theta + \frac{1}{2}$
 $= -\sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1$

よって、関数は $y = -\sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1$

$\sin \theta = x$ とおくと $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ から

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

関数は $y = -x^2 + 2x + 1$

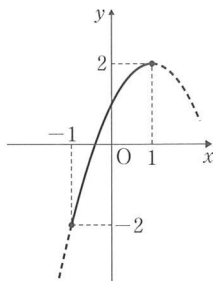
変形すると $y = -(x-1)^2 + 2$

①の範囲でのグラフは、図の実線部分である。

よって、 y は

$x = -1$ で最小値 -2 をとる。

したがって $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最小値 -2 答



$\leftarrow \sin \theta = -1$

7. 関数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数の最大値、最小値と、そのときの x の値を求めよ。
- (2) $y = 0$ となる x の値を求めよ。
- (3) $y \leq 0$ となる x の値の範囲を求めよ。

指針 三角関数の合成 $y = a \sin x + b \cos x$ を $y = r \sin(x + \alpha)$ の形に変形する。
 $\alpha \leq x + \alpha < 2\pi + \alpha$ に注意して、方程式や不等式を解く。

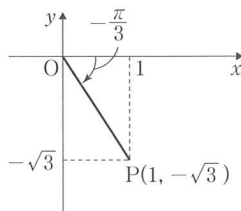
解答 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

であるから $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

また、 $0 \leq x < 2\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (1) ①の範囲のとき $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ であるから $-2 \leq y \leq 2$



よって, y は

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{5}{6}\pi \text{ で最大値 } 2 \text{ をとり,}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{11}{6}\pi \text{ で最小値 } -2 \text{ をとる。} \quad \text{答}$$

$$(2) \ y=0 \text{ のとき } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

この方程式を ① の範囲で解くと

$$x - \frac{\pi}{3} = 0, \pi \quad \text{よって} \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \quad \text{答}$$

$$(3) \ y \leq 0 \text{ のとき } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$$

この不等式を ① の範囲で解くと

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 0 \quad \text{または} \quad \pi \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \leq x < 2\pi \quad \text{答}$$

第4章 章末問題B

教 p.151

8. 次の値を求めよ。

(1) $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos(\alpha - \beta)$ の値

(2) $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = 4$, $\tan \gamma = 13$ のとき, $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$ の値

指針 余弦, 正接の加法定理の応用

(1) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ の右辺の値を, 2つの条件の式を使って計算する。それぞれの等式を2乗すると $\sin \alpha \sin \beta$, $\cos \alpha \cos \beta$ の形が現れる。(2) $\tan\{(\alpha + \beta) + \gamma\}$ として加法定理を使う。

解答 (1) 2つの条件の式のそれぞれで, 両辺を2乗すると

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{9}$$

それぞれの辺を加えると

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

$$\text{ゆえに} \quad 1 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) + 1 = \frac{13}{36}$$

$$\text{よって} \quad \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{36} - 2 \right) = -\frac{59}{72}$$

$$\text{したがって} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{59}{72} \quad \text{答}$$

$$(2) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 4}{1 - 2 \cdot 4} = -\frac{6}{7} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \tan\{(\alpha + \beta) + \gamma\} = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma} \\ &= \frac{-\frac{6}{7} + 13}{1 - \left(-\frac{6}{7}\right) \cdot 13} = \frac{-6 + 7 \cdot 13}{7 + 6 \cdot 13} = \frac{85}{85} = 1 \quad \text{答} \end{aligned}$$

9. 次の等式を証明せよ。

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

指針 加法定理と等式の証明 左辺の分母と分子に加法定理を用いる。これを変形

して右辺を導く。 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta$ を利用する。

解答 左辺 $= \frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$

分母と分子を $\cos\alpha \cos\beta$ で割って変形すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \text{右辺} \end{aligned}$$

よって $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$ 終

注意 右辺を変形して左辺を導いてもよい。ここでは式を簡略化して示そう。

$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ をそれぞれ S_α , S_β , C_α , C_β と表すことにすると

$$\sin(\alpha-\beta) = S_\alpha C_\beta - C_\alpha S_\beta, \quad \sin(\alpha+\beta) = S_\alpha C_\beta + C_\alpha S_\beta$$

$$\tan\alpha = S_\alpha/C_\alpha, \quad \tan\beta = S_\beta/C_\beta$$

よって 右辺 $= \frac{S_\alpha/C_\alpha - S_\beta/C_\beta}{S_\alpha/C_\alpha + S_\beta/C_\beta}$

分母・分子に $C_\alpha C_\beta$ を掛けて

$$\text{右辺} = \frac{S_\alpha C_\beta - S_\beta C_\alpha}{S_\alpha C_\beta + S_\beta C_\alpha} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \text{左辺} \quad \text{終}$$

10. O を原点とする座標平面上に点 A(2, 6) と第 2 象限の点 B がある。

$\triangle OAB$ が $\angle AOB$ を頂角とする二等辺三角形で $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ であるとき、点 B の座標を求めよ。

指針 点の回転 動径 OA と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると、動径 OB と x 軸の正の向きとのなす角は $\alpha + \frac{\pi}{6}$ となる。つまり、原点 O を中心として点

A を $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点が B である。

解答 動径 OA と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$$2 = OA \cos \alpha, \quad 6 = OA \sin \alpha$$

点 B の座標を (x, y) とすると

$$x = OA \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right), \quad y = OA \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

よって、加法定理により

$$x = OA \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= OA \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} - OA \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} - 3$$

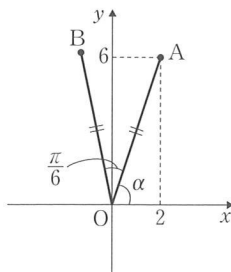
$$y = OA \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= OA \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + OA \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3} + 1$$

したがって、点 B の座標は

$$(\sqrt{3} - 3, 3\sqrt{3} + 1) \quad \text{答}$$



11. 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1) $y = \sin x \cos x$

(2) $y = \cos^2 x$

指針 いろいろな三角関数のグラフ たとえば $y = \sin x$ のグラフをもとにして、 $y = \sin(x-p)$, $y = a \sin x$, $y = \sin kx$ などのグラフをかくことができた。(1) は 2 倍角の公式により与式を変形する。

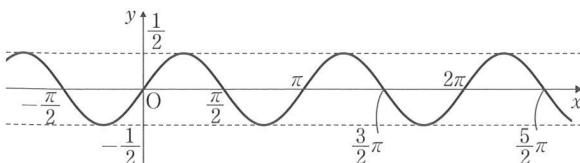
(2) 半角の公式を利用して 2 乗の形をなくす。さらに、 y 軸方向への平行移動も考える必要がある。

解答 (1) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ であるから $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

このグラフは、 $y = \sin x$ のグラフを、 x 軸をもとにして y 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に

縮小し、さらに y 軸をもとにして x 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

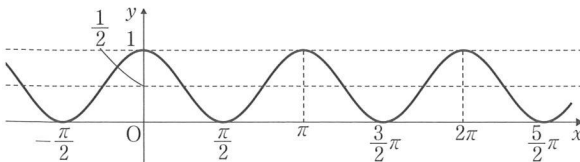
グラフは図のようになる。周期は π **答**



(2) 半角の公式により $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ $\leftarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

であるから $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$

このグラフは、 $y = \frac{1}{2} \cos 2x$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したもので、下の図のようになる。周期は π **答**



注意 正弦・余弦の半角の公式は、しばしば次の形で使われる。

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ $\leftarrow$ もとは余弦の 2 倍角の公式

12. 次の関数の最大値, 最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin x \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

指針 $\sin x, \cos x$ の関数の最大・最小 まず, $\sin x \cos x$ に 2 倍角の公式を, $\sin^2 x$ に半角の公式を用いて, 角を $2x$ にそろえる。次に, 三角関数を合成して, 関数の最大値, 最小値を考える。

解答 2 倍角の公式を用いて, 右辺を変形すると

$$\text{右辺} = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

← $a \sin \theta + b \cos \theta$ の変形

$$\text{よって } y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leq x \leq \pi$ のとき, $\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ であるから, y は

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ をとり,}$$

$$\leftarrow -1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \text{ で最小値 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ をとる。}$$

したがって

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ をとり,}$$

$$x = \frac{5}{8}\pi \text{ で最小値 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ をとる。} \quad \text{答}$$

13. 関数 $y=2\sin x \cos x + \sin x + \cos x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ として、 y を t の関数で表せ。
- (2) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) y の最大値と最小値を求めよ。

指針 三角関数の最大、最小 問いの順に従って y の最大値と最小値を求める。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ の両辺を 2 乗する。
- (2) $\sin x + \cos x$ を $r \sin(x + \alpha)$ の形に変形する。
- (3) (2) で求めた t の変域で (1) で表した t の関数の最大、最小を求める。

解答 (1) $t = \sin x + \cos x$ の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} t^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \\ &= 1 + 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad 2 \sin x \cos x = t^2 - 1$$

$$\text{よって} \quad y = (t^2 - 1) + t$$

$$\text{すなわち} \quad y = t^2 + t - 1 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{ここで, } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ であるから}$$

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \text{答}$$

$$(3) \quad (1) \text{ から } y = t^2 + t - 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

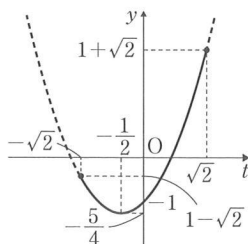
(2) より, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ であるから, グラフは図のようになる。

よって, y は

$$t = \sqrt{2} \text{ で最大値 } 1 + \sqrt{2} \text{ をとり,}$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{ で最小値 } -\frac{5}{4} \text{ をとる。}$$

したがって, 最大値は $1 + \sqrt{2}$, 最小値は $-\frac{5}{4}$ 答



コラム 身の回りに現れる正弦曲線

練習

洋服の型紙の形など身の回りに現れる正弦曲線に似た曲線は他にもあります。どのようなものがあるかを探し、なぜ正弦曲線に似た曲線が現れるのかを考えてみよう。

教 p.152

解答 (正弦曲線に似た曲線の例)

フィルムで包装してあるソーセージを斜めに切ってから、フィルムをはがして広げたときに切り口に現れる曲線

(正弦曲線に似た曲線が現れる理由)

ソーセージを底面の半径が1の円柱、フィルムはその円柱の側面に巻かれていると考える。

底面と $\frac{\pi}{4}$ の傾きをなす平面でこの円柱を切る。

底面の円の中心を通り、底面に垂直な直線と断面の交点をO、Oを中心とし底面に平行な半径1の円をCとする。

右の図において、点PはCの周上の点で

$AB \perp PH$, $PK \perp$ 底面

である。

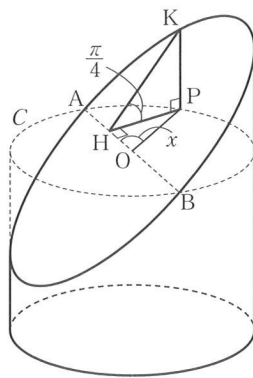
$\widehat{AP} = x$ とすると

$$\angle AOP = x$$

$$PH = |\sin x|$$

$$PK = PH = |\sin x|$$

よって、フィルムをはがして広げると正弦曲線が現れる。



4章

三角関数